

4 Сходимость по мере, единственность предела. Связь со сходимостью почти всюду

// $\mu(X) < \infty$ // Пост-ть измер. ф-ции $f_n(x)$ наз-ся **сходящ-ся по мере** к измер. $f(x)$, if $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

▽ If f и f_n - измер. по мере на X , то $f_n \xrightarrow{m.e.} f$

▲ Фикс. $\varepsilon > 0$; $\varepsilon \notin |f - f_n| \leq |f - f_n| + |f_n - f|$. По тогда либо $|f - f_n| \geq \varepsilon/2$, либо $|f_n - f| \geq \varepsilon/2$ (а значит, и одновременно) $\Rightarrow \{ |f - f_n| \geq \varepsilon \} \subseteq \{ |f - f_n| \geq \varepsilon/2 \} \cup \{ |f_n - f| \geq \varepsilon/2 \}$. Значит, $\mu(\{ |f - f_n| \geq \varepsilon \}) \leq \mu(\{ |f - f_n| \geq \varepsilon/2 \}) + \mu(\{ |f_n - f| \geq \varepsilon/2 \})$.
 ex. no m.e. $\mu(\{ |f - f_n| \geq \varepsilon \}) = 0, \forall \varepsilon > 0$. Ответим, что $\{ |f - f_n| \geq \varepsilon \} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ |f - f_n| \geq 1/n \} \Rightarrow \mu(\{ |f - f_n| \geq \varepsilon \}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{ |f - f_n| \geq 1/n \}) = 0 \Rightarrow \mu(\{ |f - f_n| \geq \varepsilon \}) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{m.e.} f$

Пост-ть f_n **n.b. ex-а** на X к f , if $\exists$ мн-во $E \subset X$, $\mu(E) = 0$ и $f_n(x) \xrightarrow{x \in E} f(x)$

▽ $\int f_n(x) \xrightarrow{n.b.} \int f(x)$, $f_n(x)$ - измер. Тогда $f_n(x) \xrightarrow{m.e.} f(x)$

▲ 1) $\int f_n(x) \rightarrow \int f(x), \forall x \in X; \forall \varepsilon > 0$ введем $E_n = \{ |f_n - f| \geq \varepsilon \}$.
 $R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$; $R_{n+1} \subset R_n$; $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$.
 If $\mu(R) = 0$, то в силу непрерывности меры $\mu(R_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
 $E_n \subset R_n \Rightarrow \mu(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{m.e.} f$. Покажем, что всегда $\mu(R) = 0$, а точнее, что $R \neq \emptyset$. $\int x \in R \Rightarrow x \in R_n, \forall n$; но $R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \Rightarrow x \in E_{k_m}, m=1, 2, \dots$. По $E_n = \{ |f_n - f| \geq \varepsilon \} \Rightarrow |f_{k_m}(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \forall k_1, k_2, \dots$. Значит, $f_{k_m}(x) \not\xrightarrow{m.e.} f(x) \Rightarrow (1) \Rightarrow \mu(R) = 0$

2) $\int f_n(x) \xrightarrow{n.b.} \int f(x); \mu(E) = 0, f_n(x) \not\xrightarrow{m.e.} f(x)$. Возьмем $X = X \setminus E$. На X $f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in X \Rightarrow$ см. п. 1) Значит, $f_n(x) \xrightarrow{m.e.} f(x)$ (ибо отбрасываются они на мн-ве нулевой меры).

▽ $\int f_n \xrightarrow{m.e.} \int f$ (f_n, f - измер.). Тогда $\exists$ n/пост-ть $f_{n_k}(x) \xrightarrow{n.b.} f(x)$

▲ $\mu(\{ |f_n - f| \geq \varepsilon \}) \rightarrow 0$; Введем $f_{n_k} : \{ |f_{n_k} - f| \geq 1/k \} \subseteq \{ |f_n - f| \geq 1/2^k \}$. Введем $E_k = \{ |f_{n_k} - f| \geq 1/k \}$; $R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$; $\mu(R_n) \leq$

$\leq \sum_{k=n}^{\infty} 1/2^k = 1/2^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; $R_{n+1} \subset R_n$, $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$. В силу
 Help-тв. меры, $\mu(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(R_n) = 0$. Покажем, что
 $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in X \setminus R$.
 $\exists x \in X \setminus R \Rightarrow \exists R_n: x \notin R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \Rightarrow x \notin E_k, k=n, n+1, \dots$
 $\Rightarrow |f_n - f| < 1/k, \forall k \geq n$. Устремляя k к бесконечности
 получим, $|f_n - f| \rightarrow 0 \Rightarrow \forall x \in X \setminus R, f_n \rightarrow f$ ■